

Abordagem de uma aplicação das geometrias não euclidianas

Approach of an application non-euclidean geometry

¹ Roberto Carlos Maratta, ¹ Luciane de Fátima Rodrigues de Souza

¹ Departamento de Matemática – FIRA-Faculdades Integradas Regionais de Avaré – 18700-902 – Avaré-SP – Brasil
E-mail: luciane_fa@yahoo.com.br

Resumo

As Geometrias Não Euclidianas surgiram devido à inconsistência do quinto postulado de Euclides. Este trabalho traz uma abordagem da Geometria Elíptica, mostrando algumas de suas propriedades. O objetivo principal foi apresentar a Geometria Elíptica como ferramenta para a resolução de situações que envolvam rotas de embarcações sobre a superfície terrestre, já que um modelo dessa geometria é a esfera. Para os cálculos foram deduzidas fórmulas de Trigonometria Esférica. Através do desenvolvimento do trabalho pode-se confirmar que as Geometrias Não Euclidianas devem ter espaço nas grades curriculares das instituições superiores, por serem consistentes e modelarem o universo.

Palavras-chaves: Geometrias Não Euclidianas. Geometria Hiperbólica. Geometria Elíptica.

Abstract

The non-Euclidean geometries appeared due to the inconsistency of the fifth postulate of Euclid. This study addressed two of them: the hyperbolic geometry and elliptic geometry, showing some of

its properties. The main objective was to present the elliptic geometry as a tool for resolving situations involving routes of vessels on the surface, as a model of this geometry is a sphere. The calculations were derived formulas of spherical trigonometry. Through the development of the work can be confirmed that the non-Euclidean geometries must be room in the curricula of higher institutions, because they are consistent and model the universe.

keywords: non-euclidean geometries. hyperbolic geometry. elliptic geometry.

1. Introdução

A geometria surgiu devido à necessidade do homem em medir a terra. Foi por volta de 300 a.C que ela chegou ao apogeu sendo sistematizada pelo grego Euclides de Alexandria. O resultado dos diversos axiomas, postulados e teoremas por ele demonstrados é o livro Elementos. Por mais de dois milênios a geometria de Euclides foi tida como uma verdade absoluta. Durante esse período, muitos matemáticos tentaram provar, através dos outros postulados, o quinto postulado de Euclides ou Postulado das Paralelas. Alguns chegaram perto de desenvolver uma nova geometria como é o caso do italiano Saccheri que se empenhou em demonstrar o quinto postulado, mas não chegou a nenhuma conclusão concreta. Foi no século XIX, que definitivamente novas geometrias tão consistentes quanto à euclidiana surgiram e foram denominadas Geometrias Não Euclidianas. O precursor da idéia foi o russo Lobachevsky que apresentou sua geometria imaginária que tinha como principal característica a curvatura negativa (BOYER, 1996). Ou seja, neste plano havia a possibilidade de se traçar, por um ponto exterior a uma reta, no mínimo duas retas paralelas à reta dada e triângulos cuja soma de seus ângulos internos não chegava a 180° .

Gauss afirmava já ter a idéia da existência de outras geometrias, mas como naquela época a filosofia kantiana dominava a Alemanha, ficou em silêncio para preservar sua integridade. Essa

nova descoberta abriu caminho para outras Geometrias Não Euclidianas como a desenvolvida por Riemann, onde a curvatura é positiva, a soma dos ângulos internos de um triângulo desse plano excede 180° , além de não ser possível traçar, por um ponto exterior a uma reta, nenhuma paralela a reta dada (EVES, 2004). Essa geometria ficou conhecida como Geometria Elíptica ou Geometria de Riemann, onde se pode usar a esfera como modelo para seu estudo.

A partir dessas novas geometrias passou-se a questionar qual seria a geometria que descreveria melhor o universo. A aplicação dessas novas geometrias nas ciências modernas e a pouca divulgação nos cursos de licenciatura em matemática foram fatores determinantes para a escolha desta pesquisa.

Nesse contexto o objetivo do trabalho é apresentar algumas propriedades básicas das Geometrias Não Euclidianas e alguns modelos de construções dessas geometrias. Também é objetivo mostrar alguns resultados obtidos que são usados na resolução de problemas que envolvam distâncias na superfície esférica como rotas de navegação marítima.

Para o desenvolvimento da pesquisa serão abordadas a história e algumas propriedades dos dois tipos clássicos de Geometrias Não Euclidianas: a Geometria Hiperbólica e a Geometria Elíptica, sendo utilizado um modelo da Geometria Elíptica para obter resultados de uma aplicação das Geometrias Não Euclidianas. O objetivo principal do trabalho é apresentar a utilização da Geometria Elíptica como ferramenta necessária e determinante para problemas envolvendo cálculo de distâncias na superfície terrestre. Para atingir os objetivos específicos serão apresentadas as geometrias não euclidianas através de uma análise histórica sucinta, apresentadas as principais propriedades do modelo elíptico, apresentados os conceitos de localização de pontos na superfície da esfera terrestre e deduzidas algumas fórmulas de trigonometria esférica para a resolução dos problemas apresentados.

3. Metodologia

Para atingir os objetivos do trabalho serão consultados livros, dicionários, dissertações, artigos científicos, revistas e sites da internet.

Para a construção de algumas ilustrações serão usados os softwares de geometria Cinderella 2 e Cabri Géomètre II e os aplicativos Power Point e Paint. Os cálculos foram feitos com o auxílio de uma calculadora científica.

4. Tópicos da história da geometria

A palavra geometria é resultado da junção de dois termos gregos: *geo* que significa terra e *metría* que significa medida de.

Não se sabe o período exato da origem da geometria. O historiador grego Heródoto acreditava que a geometria originou-se no antigo Egito devido à necessidade de demarcação das terras às margens do Rio Nilo anualmente, depois de seu período de cheia. O filósofo grego Aristóteles creditava também aos egípcios a origem da geometria, porém acreditava que seu desenvolvimento foi devido à existência de sacerdotes com tempo disponível para desenvolver seu estudo e aplicá-lo na construção de templos (BOYER, 1996).

Entretanto, é sabido que a geometria não se originou no antigo Egito, pois se pode perceber uma cuidadosa simetria e congruência nos artefatos do homem do período neolítico como potes, tecidos e cestos (BOYER, 1996).

Os egípcios e também os babilônios dominavam a matemática daquela época. Centenas de papiros e placas de barro cozido com problemas aplicados do cotidiano dessas civilizações foram encontradas, porém, não tinham uma organização lógica do assunto. Cerca de 800 a.C., a civilização grega entrava em foco, mas sem nenhuma tradição na matemática, porém eram ávidos por conhecimento e melhoravam tudo que aprendiam.

Foi por volta de 600 a.C. que surgiu Tales, da cidade grega de Mileto. Sabe-se pouco sobre a vida de Tales de Mileto, mas é creditado a ele o título de primeiro filósofo e o primeiro dos setes sábios da Grécia. É concedido a ele também o título de primeiro matemático da história por ter sido o primeiro a desenvolver, de forma lógica, algumas proposições básicas da Geometria que se acredita-se terem sido obtidas em suas viagens pelo Egito e Mesopotâmia (BOYER, 1996).

Na mesma época surgia também Pitágoras de Samos fundador da escola pitagórica que tinha como sua grande marca a combinação entre teoria dos números e misticismo. Seus trabalhos sobre a teoria das paralelas deram forma à geometria.

Por volta de 336 a.C, o macedônio Alexandre (O grande) deu início à fundação de uma série de cidades, uma delas foi Alexandria, no Egito, situada em um ponto de rotas comerciais o que favoreceu o desenvolvimento da cidade em pouco tempo (EVES, 2004).

Com a morte de Alexandre seu império foi dividido entre alguns de seus líderes militares. O Egito ficou a cargo de Ptolomeu que fez de Alexandria sua capital e iniciou a construção da Universidade de Alexandria. Para composição da equipe de professores recorreu a Atenas designando Demétrio Faleiros para dirigir a grande biblioteca e para o departamento de matemática o escolhido foi Euclides (EVES, 2004).

4.1. Euclides e seus *Elementos*

No período em que lecionava na Universidade de Alexandria, Euclides desenvolveu seu mais célebre trabalho intitulado *Elementos*. Uma obra que era constituída de treze volumes, onde toda a matemática básica desde os tempos de Tales foi sistematizada. Foi um trabalho tão influente que até hoje é a base para o ensino nas escolas.

Na obra são apresentados 465 teoremas que se fundamentam em cinco axiomas e cinco postulados, apresentados no livro I. Embora hoje não se faça distinção entre axioma e postulado, os

gregos daquele tempo os distinguiam dizendo que um axioma é uma conjectura comum a todas as ciências e postulado como uma conjectura particular da ciência em estudo.

Os cinco axiomas são:

- Axioma 1: coisas iguais a uma terceira são iguais entre si;
- Axioma 2: se quantidades iguais são adicionadas a iguais, os totais são iguais;
- Axioma 3: se quantidades iguais são subtraídas de iguais, os restos são iguais;
- Axioma 4: coisas que coincidem uma com a outra são iguais;
- Axioma 5: o todo é maior do que qualquer de suas partes.

E os postulados:

- Postulado 1: uma linha reta pode ser traçada de um ponto a outro, escolhidos à vontade;
- Postulado 2: uma linha reta pode ser prolongada indefinidamente;
- Postulado 3: um círculo pode ser traçado com centro e raios arbitrários;
- Postulado 4: todos os ângulos retos são iguais;
- Postulado 5: se uma reta secante a duas outras forma ângulos, de um mesmo lado dessa secante, cuja soma é menor que dois ângulos retos, então essas retas se prolongadas suficientemente encontrar-se-ão em um ponto deste mesmo lado.

A falta de clareza do quinto postulado é evidente. Em virtude disso, vários matemáticos através dos séculos, acreditaram que ele poderia ser demonstrado a partir dos outros quatro.

A Figura 1 mostra geometricamente o enunciado do quinto postulado de Euclides.

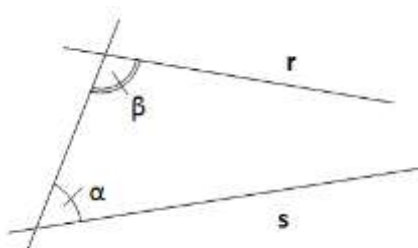


Figura 1 - Quinto Postulado de Euclides

Se $\alpha + \beta < 180^\circ$ então as retas **s** e **r** se interceptam do lado de α e β .

Pode-se substituir o quinto postulado por um mais simples, e equivalente, formulado pelo matemático e físico escocês John Playfair (1748 – 1819) chamado atualmente de postulado das paralelas: “Por um ponto exterior a uma reta dada existe uma única reta paralela à reta dada”.

(Figura 2)

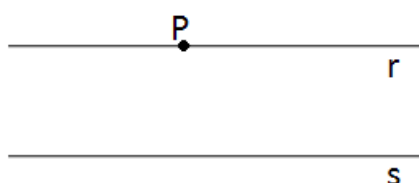


Figura 2 - Postulado das Paralelas

O ponto **P** é exterior à reta **s** e **r** é a única paralela a **s** passando por **P**.

Muitos matemáticos se empenharam em tentar demonstrar o quinto postulado. O padre jesuíta italiano Girolamo Saccheri (1667 - 1733) foi um deles e na tentativa desenvolveu um quadrilátero em que os dois ângulos da base eram retos e tinham dois lados opostos de medidas iguais. Seu objetivo era provar que o quadrilátero era retângulo utilizando apenas os quatro primeiros postulados, mas não obteve sucesso. Esse quadrilátero ficou conhecido como “quadrilátero de Saccheri” e será mostrado na Figura 9. Pode-se dizer que Saccheri foi quem abriu o caminho para a descoberta das Geometrias Não Euclidianas.

O alemão Johann Heinrich Lambert (1728 – 1777), sem ter conhecimentos do trabalho de Saccheri, também desenvolveu um quadrilátero com três ângulos retos que hoje se conhece por “quadrilátero de Lambert” (Figura 10).

Em 1829 o matemático russo Nicolai Lobachevsky (1792-1856), negou o quinto postulado de Euclides, admitindo que por um ponto fora de uma reta passam pelo menos duas retas paralelas.

Ele foi o primeiro a publicar esta teoria e por isso é considerado o fundador oficial das Geometrias Não Euclidianas, embora Gauss em 1824, afirmava já saber dessa possibilidade, mas manteve-se calado pelo fato da filosofia kantiana dominar a Alemanha naquela época. Em 1832, o húngaro Janos Bolyai (1802-1860), independentemente, obteve os mesmos resultados. Essa geometria, que possui curvatura negativa, passou a ser chamada de Geometria Hiperbólica ou, nas palavras de seu criador: geometria imaginária. Em 1854, o alemão Georg Benhard Riemann (1826-1866) nega o quinto postulado de Euclides de outra forma: por um ponto fora de uma reta não se pode conduzir nenhuma reta paralela à reta dada. Essa outra Geometria Não Euclidiana passou a ser chamada de Geometria Elíptica ou Geometria Riemanniana ou Geometria Esférica e a curvatura de seu espaço é dita positiva. A Figura 3 compara os três planos:

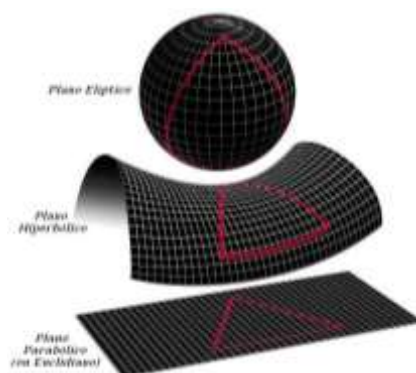


Figura 3 - Comparação dos planos

Fonte: (WIKIPEDIA)

A prova da consistência desta nova geometria foi feita pelo método dos modelos idealizados por: Eugênio Beltrami (1835-1900, Itália), Felix Klein (1849-1925, Alemanha) e Henri Poincaré (1854-1912, França) independentemente.

5 PROPRIEDADES E CONSTRUÇÕES BÁSICAS DAS GEOMETRIAS HIPERBÓLICA E ELÍPTICA

5.1 Geometria hiperbólica

Na Geometria Hiperbólica comumente são usados quatro modelos para representar o plano hiperbólico, sendo um modelo tridimensional e os outros três bidimensionais.

O modelo tridimensional foi idealizado por Beltrami. É obtido pela rotação de uma curva tractriz. A superfície do sólido gerado, denominado pseudo-esfera, é o plano em questão (Figura 4).

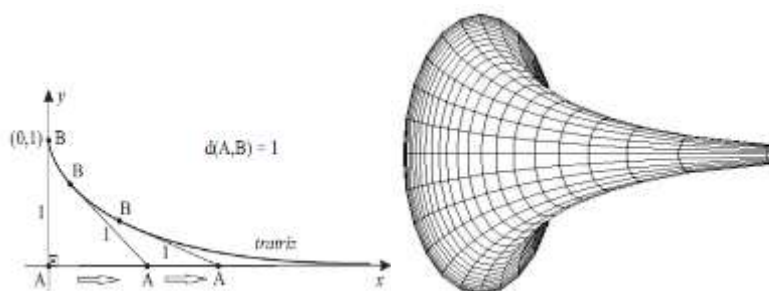


Figura 4 - Curva tractriz e Pseudo-esfera

Fonte: (PROGRAMA DE EDUCAÇÃO TUTORIAL)

Felix Klein elaborou um modelo hiperbólico bidimensional para representar a geometria imaginária de Lobachevsky. Trata-se de um círculo limitado do plano euclidiano (Figura 5). O plano hiperbólico é determinado pela região interna do círculo, excluindo sua fronteira, e as retas hiperbólicas são determinadas pelas cordas do círculo, excluindo suas extremidades, sendo infinita a extensão dessas retas dentro da região limitada do círculo.

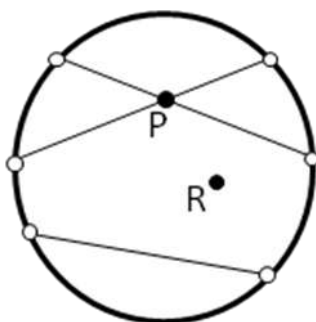


Figura 5 - Modelo de Klein

Os dois outros modelos, elaborados por Poincaré, são comumente os mais utilizados quando se estuda a geometria hiperbólica. O primeiro modelo é similar ao modelo de Klein. É determinado pelo interior de um círculo euclidiano limitado, com o diferencial de que suas retas hiperbólicas são representadas por arcos de circunferências e são perpendiculares à fronteira do plano. Esse modelo é conhecido como modelo de Poincaré ou Disco de Poincaré (Figura 6).

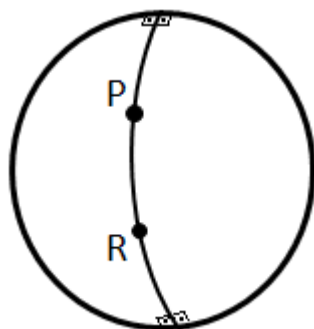


Figura 6 - Disco de Poincaré

O segundo modelo elaborado por Poincaré é chamado de semiplano de Poincaré (Figura 7). Esse modelo é determinado pelos pontos de ordenada positiva de um plano cartesiano tendo o eixo x como fronteira do plano. As retas hiperbólicas são determinadas por semicírculos com centro no eixo x.

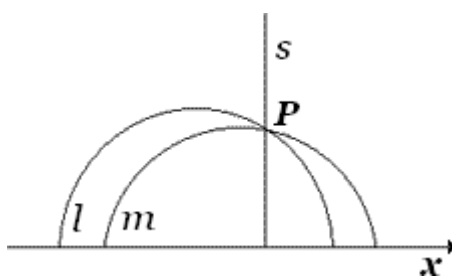


Figura 7 - Semiplano de Poincaré

Na Figura 7: *l*, *m*, e *s* são retas hiperbólicas do semiplano de Poincaré.

As construções hiperbólicas que serão apresentadas posteriormente nesse trabalho serão exibidas no modelo que ofereça maior compreensão ao leitor.

5.1.2 O quinto postulado da geometria hiperbólica

O postulado das paralelas no espaço hiperbólico é conhecido como Postulado de Lobachevsky por ter sido esse o seu criador. Seu enunciado é: “por um ponto exterior a uma reta dada passa mais de uma paralela à reta dada”.

O Postulado de Lobachevsky está ilustrado no modelo de Klein (Figura 8), onde as retas a e b são paralelas à reta r passando pelo ponto P . Entre as duas – região cinza - existem infinitas retas que também não interceptam r e são denominadas retas não-secantes, que passam por P . Somente as retas a e b são ditas paralelas à reta dada e tendem a interceptá-la em um ponto denominado ponto ideal. As retas não-secantes também tendem a interceptar a reta r num ponto chamado de ultra-ideal.

As retas a e b , paralelas à reta r , recebem o nome de paralelas-limite.

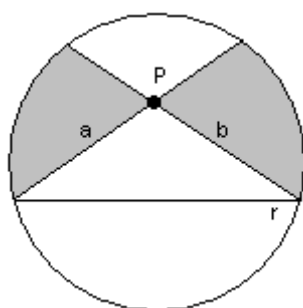


Figura 8 - O Postulado das Paralelas no modelo de Klein

5.1.3 Quadriláteros hiperbólicos

Assim como na geometria plana, na geometria hiperbólica também é possível construir quadriláteros, porém, com o diferencial de que nessa geometria a soma dos seus ângulos internos é sempre menor do que 360° . Existem dois quadriláteros particulares na geometria hiperbólica: o quadrilátero de Saccheri e o quadrilátero de Lambert.

5.1.3.1 Quadrilátero de Saccheri

Nesse quadrilátero, conforme Figura 9, AD é denominado lado base, BC é denominado lado topo do quadrilátero e AB e DC são os lados congruentes do quadrilátero. Os ângulos do lado base são retos e os dois ângulos do lado topo são agudos e congruentes.

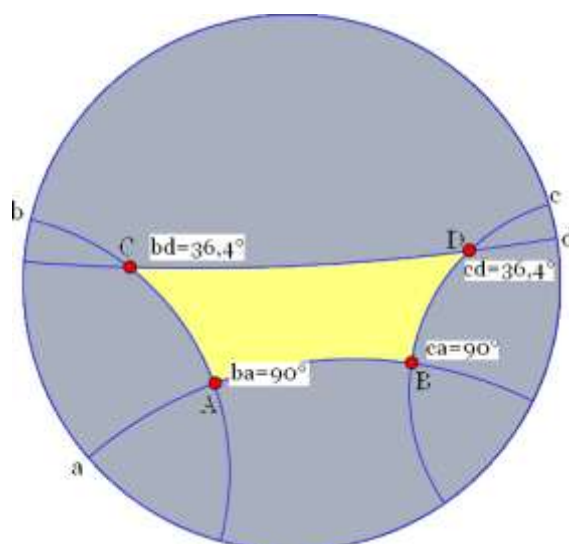


Figura 9 - Quadrilátero de Saccheri

5.1.3.2 Quadrilátero de Lambert

No quadrilátero de Lambert somente um ângulo é agudo e os outros três ângulos são retos (Figura 10).

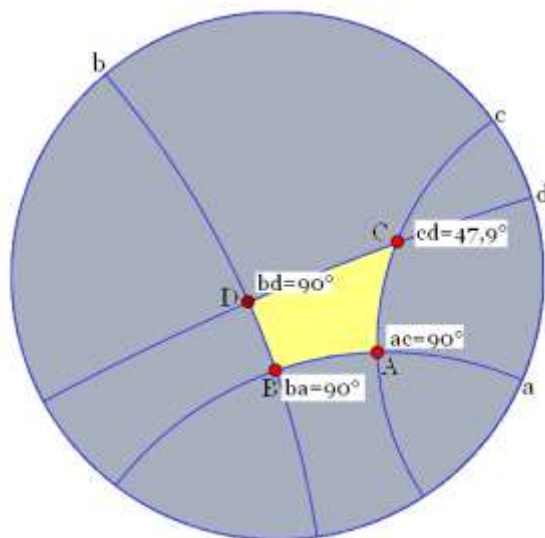


Figura 10 - Quadrilátero de Lambert

5.2 Geometria Elíptica

As geometrias: Projetiva, Estereográfica e Hiperesférica são todas modelos de Geometria Elíptica. Nesse trabalho será abordada a Geometria Hiperesférica, pois seus conceitos e construções podem ser feitos na superfície de uma esfera.

Uma definição precisa de esfera é: considera-se um ponto O e um segmento de medida r . Chama-se esfera de centro O e raio r ao conjunto dos pontos P do espaço, tais que a distância OP seja menor ou igual a r (DOLCE; POMPEU, 2004).

Como será trabalhado com a superfície esférica é conveniente defini-la: Chama-se superfície da esfera de centro O e raio r ao conjunto dos pontos P do espaço, tais que a distância OP seja igual a r . Pode-se dizer que a superfície de uma esfera é a superfície de revolução gerada pela rotação de uma semicircunferência com extremidades no eixo. (DOLCE, POMPEU, 2004) (Figura 11).

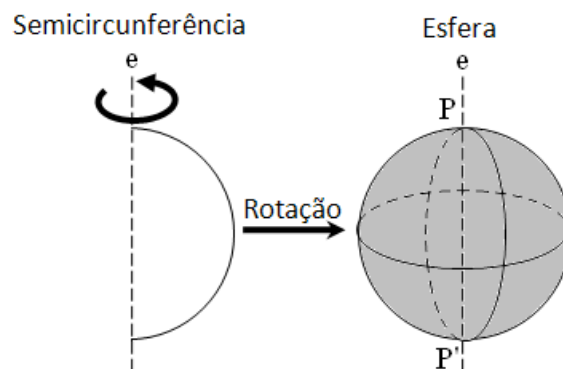


Figura 11 - Superfície Esférica

As extremidades P e P' do eixo (e) de um círculo máximo da esfera são denominadas pólos da esfera.

5.2.1 Secção plana da esfera e distância esférica

Toda interseção de um plano com a esfera será um círculo máximo ou um círculo menor.

Um círculo máximo da esfera resulta da interseção de um plano que passa pelo centro da esfera. Todos os círculos máximos da esfera são iguais, pois todos têm como raio o raio da esfera. Por dois pontos quaisquer sobre uma esfera sempre será possível traçar um círculo máximo, desde que passe pelo centro da mesma.

Um círculo é dito menor quando a interseção de um plano com dois pontos da superfície esférica não passa pelo centro da esfera.

Na Figura 12, O é o centro da esfera e AB é círculo máximo, pois o plano α intercepta a esfera passando pelo seu centro. DE é círculo menor, pois no plano β , que intercepta a esfera, não está contido seu centro.

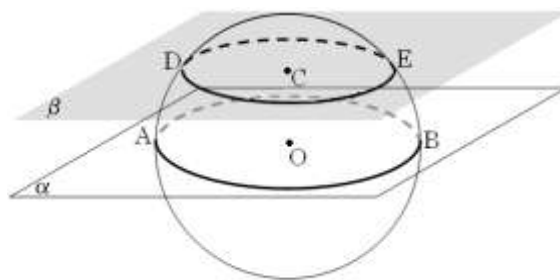


Figura 12 - Círculo máximo e círculo menor

Sendo os dois pontos A e B da esfera de centro O (Figura 12). O plano secante α que contém estes dois pontos e o centro da esfera determina um círculo máximo que contém A e B . A distância entre os pontos A e B é o comprimento do menor arco de círculo máximo que passa por esses pontos.

5.2.2 O Postulado de Riemann

A Geometria Elíptica ou da Esférica é dita não euclidiana por contradizer o quinto postulado de Euclides. É chamado de postulado de Riemann por ter sido este seu criador. Seu enunciado é: “por um ponto exterior a uma reta dada não existe reta paralela à reta dada” (Figura 13)

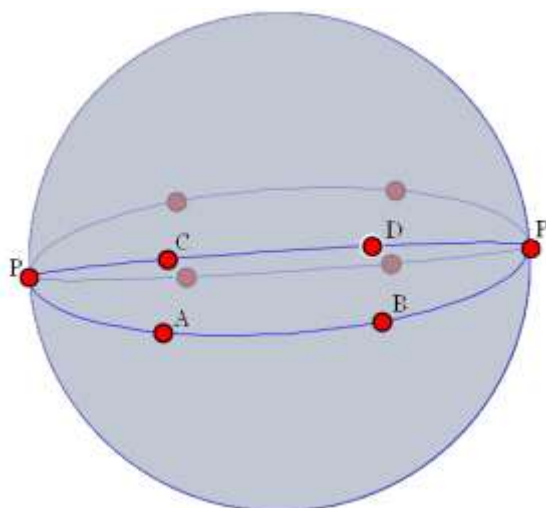


Figura 13 - Postulado de Riemann

As retas elípticas AB e CD interceptam-se nos pólos uma da outra. Esses pontos de interseção são chamados de pontos antípodas.

5.2.3 Ângulo esférico

Ângulo esférico é o ângulo formado pela interseção de dois arcos de círculos máximos. Sua medida é a mesma do ângulo plano θ formado pelas retas t_1 e t_2 tangentes, no ponto de intersecção, aos lados do ângulo. (Fig. 14)

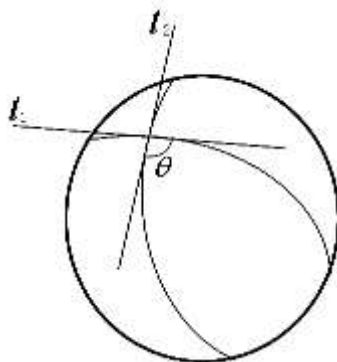


Figura 14 - Ângulo esférico

Fonte: (COUTINHO, 2001)

5.2.4 Triângulo esférico

Três pontos de uma esfera de centro O , não pertencentes a um mesmo círculo máximo, ligados dois a dois por meio de arcos de círculo máximo formam os vértices de um triângulo esférico ABC da Figura 15.

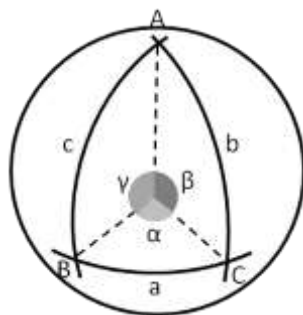


Figura 15 - Triângulo esférico

Os lados a , b e c opostos respectivamente aos vértices A , B , e C se medidos em unidades de comprimento, dependem do raio da esfera, se medidos em unidades de arco, independem do raio da esfera.

Os ângulos α , β e γ são correspondentes aos arcos a , b e c respectivamente. Logo, eles têm a mesma medida em graus.

Todos os triângulos esféricos têm três alturas, três medianas, três mediatrizes e três bissetrizes definidos do mesmo modo que na geometria plana.

Na geometria da esfera os termos triângulos equilátero, isósceles, retângulo e obliquângulo têm o mesmo sentido do que em geometria plana.

Dois triângulos esféricos podem ser:

- Adjacentes, se têm um lado em comum.
- Simétricos, se os vértices de um deles são diretamente opostos aos vértices do outro (pontos antípodas).
- Opostos pelo vértice se têm um vértice comum.

A grande característica dessa geometria, ao lado do fato de não existirem retas paralelas, é que a soma dos ângulos internos de um triângulo varia entre 180° e 540° . Podendo ser representada pela dupla desigualdade: $180^\circ < A + B + C < 540^\circ$.

Um triângulo esférico pode ser: retângulo, quando tiver um ângulo reto; birretângulo, quando tiver dois ângulos retos; e trirretângulo, quando tiver três ângulos retos.

5.2.5 Quadriláteros Elípticos

Com o auxílio do software Cinderella 2 pode-se, de maneira convincente, visualizar algumas propriedades dos quadriláteros da geometria elíptica.

No quadrilátero de Saccheri (Fig. 16) podem ser observadas duas importantes propriedades:

- O segmento que liga os pontos médios da base e do topo é perpendicular a ambos;
- Os ângulos do topo são congruentes e obtusos.

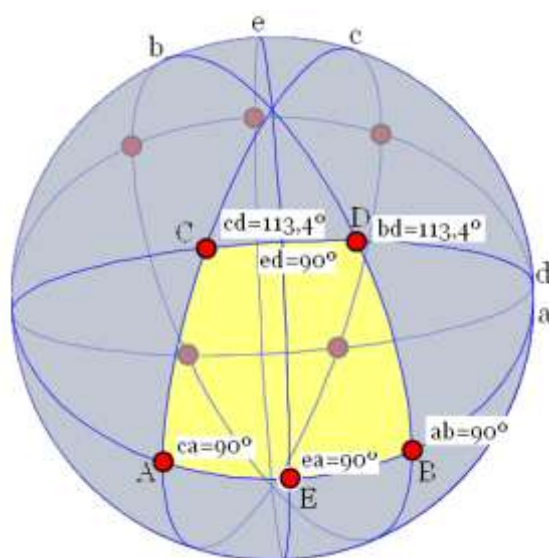


Figura 16 - Quadrilátero de Saccheri no Modelo Elíptico

A principal propriedade para um quadrilátero de Lambert é:

O seu quarto ângulo é obtuso e os lados adjacentes a esse ângulo são maiores que os opostos correspondentes (Fig. 17)

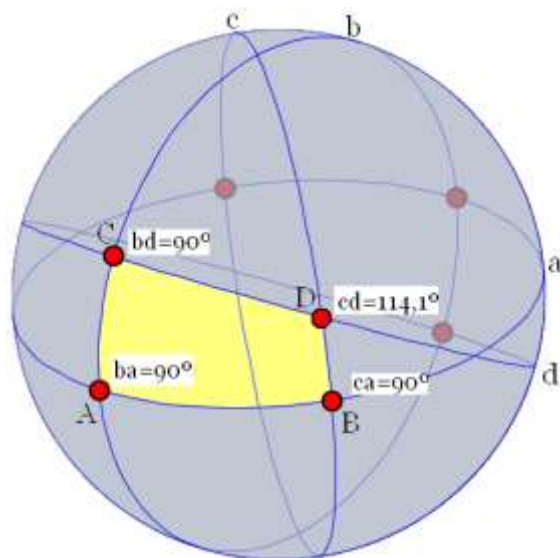


Figura 17 - Quadrilátero de Lambert no Modelo Elíptico

Na geometria elíptica a soma dos ângulos internos de qualquer quadrilátero sempre excede 360° .

6. Uma aplicação para o modelo elíptico de riemann: a navegação marítima

Sendo a forma do planeta Terra semelhante a uma esfera faz-se necessário o estudo da geometria esférica como ferramenta para o cálculo de rotas de navegação marítima e até de aviões, pois as distâncias percorridas por esses são arcos de círculo máximo.

6.1 A Terra

A Terra não é uma esfera perfeita, pois há um pequeno achatamento nos pólos. Porém, essa deformidade não ocasiona distorções nos cálculos de trigonometria esférica que são utilizados para determinação de rotas de navegação.

Na Figura 18 pode-se comparar a forma da Terra e a sua forma aproximada.

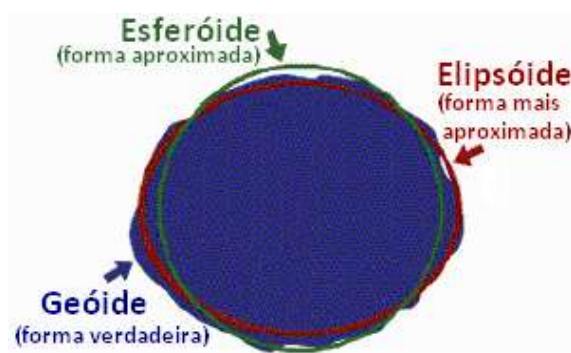


Figura 18 - Modelos de representação da Terra

Fonte: (UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE)

6.2 As linhas imaginárias da esfera terrestre

O pólo norte e o pólo sul são os pólos principais da Terra. Os círculos perpendiculares ao eixo que une os pólos são os paralelos da Terra, sendo que o paralelo máximo, que é um círculo máximo do globo terrestre, é denominado Linha do Equador e divide a esfera terrestre em duas partes iguais chamadas de hemisférios norte e sul, conforme o pólo que contiver.

Os semicírculos máximos que vão de um pólo ao outro são denominados meridianos e são perpendiculares a todos os paralelos. O meridiano que passa pelo observatório de astronomia da cidade de Greenwich, na Inglaterra, é tomado como meridiano inicial, ou seja, divide a Terra em duas partes iguais: leste e oeste.

A **Figura 19** mostra as linhas imaginárias da Terra.

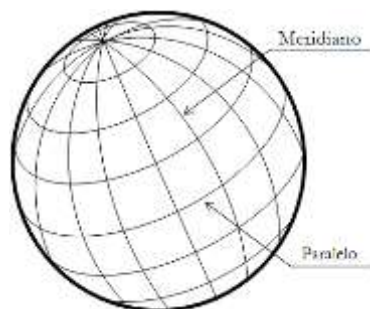


Figura 19 - As linhas da esfera terrestre

6.3 As coordenadas geográficas

Na esfera, em particular a esfera terrestre, pode-se localizar qualquer ponto, que sempre é determinado pelo cruzamento de um paralelo com um meridiano, sendo semelhante à localização de um ponto, por um par ordenado, no plano cartesiano. Para isso são necessárias duas medidas denominadas coordenadas geográficas e chamadas de latitude e longitude.

6.3.1 Latitude

Latitude de um ponto qualquer da esfera é o arco de um meridiano, medido em graus, minutos e segundos; que vai da linha do Equador ao paralelo do ponto dado. Pode variar de 0° , ponto situado na linha do equador, a 90° , ponto situado em um dos pólos da esfera, sendo denominada latitude norte ou sul dependendo do hemisfério que o ponto estiver.

6.3.2 Longitude

Longitude de um ponto qualquer da esfera é o arco de paralelo, medido em graus, minutos e segundos; que vai do meridiano de Greenwich até o ponto dado. Sua medida varia de 0° , ponto situado no meridiano de referencia, a 180° , ponto situado no meridiano denominado de linha internacional da data. A longitude de um ponto pode ser oeste ou leste, dependendo do lado que estiver do meridiano de Greenwich.

Neste trabalho a latitude e a longitude serão representadas pelas letras gregas minúsculas φ (phi) e λ (lambda), respectivamente.

A Figura 20 mostra a latitude e a longitude de um ponto P .

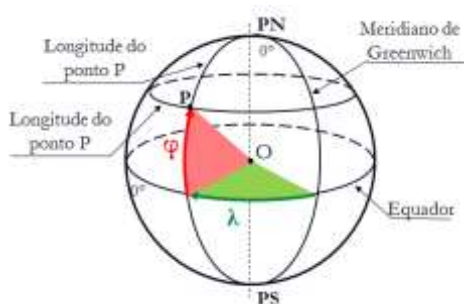


Figura 20 - Latitude e Longitude de um ponto

6.4 Milha marítima

Em navegação marítima a unidade de distância é denominada milha marítima milha náutica. Convencionou-se essa unidade por ela ser a distância coberta por 1' de um círculo máximo terrestre. Em razão da deformidade da esfera terrestre seu valor pode variar, pois ao considerar o arco de 1' próximo aos pólos, onde a Terra é mais achatada, o valor da distância pode chegar a 1843 metros e considerando o mesmo arco próximo a linha do Equador, onde a Terra tem o formato mais arredondado; o valor chega a 1862 metros. Devido a isso se estabeleceu a milha marítima internacional que corresponde à média das medidas das distâncias no pólo e na linha do Equador e vale 1852 metros.

Então, para transformar milha marítima em quilômetro multiplica-se o valor por 1,852 e para transformar quilômetro em milha marítima divide-se o valor por 1,852.

6.5 Rotas de navegação

Existem dois tipos de rotas ou derrotas que o comandante de uma embarcação pode seguir. Uma delas é a derrota ortodrômica, uma rota que segue um arco de círculo máximo. Outra é a derrota loxodrômica onde não se segue um arco de círculo máximo.

Embora seja preferível viajar por uma derrota ortodrômica pode haver a necessidade de o comandante mudar o curso da embarcação e seguir uma derrota loxodrômica, muitas vezes, devido a fatores naturais como tempestades, bancos de areia, recifes, icebergs etc.

6.6 Trigonometria esférica

O comandante de um navio precisa planejar a rota que irá seguir para que a viagem seja rápida e haja economia no consumo de combustível, ou seja, deverá seguir, sempre que possível rotas ortodrômicas. Para isto ele precisa ter conhecimentos de trigonometria esférica, pois navega sobre um arco de circunferência.

Pode-se resolver um triângulo esférico se:

- Três lados forem dados;
- três ângulos forem dados;
- se dados dois lados e o ângulo compreendido;
- se dados dois ângulos e o lado compreendido;
- se dados dois lados e o ângulo oposto a um deles;
- se dados dois ângulos e o lado oposto a um deles.

6.6.1 Fórmulas para resolução de triângulos esféricos

Serão apresentadas, de forma concisa, algumas fórmulas essenciais para a resolução de problemas envolvendo rotas de navegação na esfera terrestre.

6.6.1.1 Fórmulas para triângulos retângulos esféricos

A partir da obra de Coutinho (2001) tem-se na Figura 21 um triângulo esférico ABC de uma esfera de centro O . O ângulo A é reto.

Por B traça-se uma reta tangente ao arco AB e encontra o prolongamento do raio AO em A' . Também por B , traça-se outra reta tangente que encontra com o prolongamento do raio OC em C' , então, liga-se A' e C' .

Desde que o raio OB é perpendicular às tangentes BA' e BC' , segue-se que o plano $A'BC'$ é perpendicular a cada plano que passa por OB e, portanto, ao plano AOB . O plano AOC é perpendicular ao plano AO , pois A é reto. A reta $A'C'$ é perpendicular ao plano AOB , pois é a intersecção dos planos AOC e $A'BC'$. Logo, os ângulos $A'OC'$ e $B\hat{A}'C$ são retos.

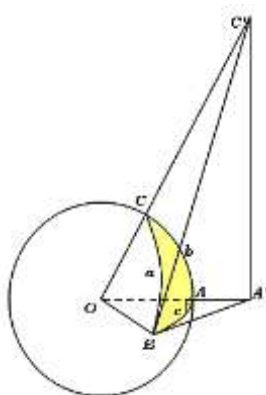


Figura 21 - Triângulo Retângulo Esférico

Fonte: (COUTINHO, 2001)

A partir destas conclusões, tiram-se as relações:

$$\frac{OB}{OC'} = \frac{OA'}{OC'} \cdot \frac{OB}{OA'} \Rightarrow \cos a = \cos b \cdot \cos c \quad (1)$$

$$\frac{A'C'}{BC'} = \frac{A'C'}{OC'} \cdot \frac{OC'}{BC'}, \text{ ou } \sin B = \frac{\sin b}{\sin a} \Rightarrow \sin b = \sin a \cdot \sin B \quad (2)$$

$$\text{E, por analogia: } \sin c = \sin a \cdot \sin C \quad (3)$$

$$\frac{A'B}{BC'} = \frac{A'B}{OB} \cdot \frac{OB}{BC'}, \text{ ou } \cos B = \frac{\operatorname{tg} c}{\operatorname{tg} a} \Rightarrow \operatorname{tg} c = \cos B \cdot \operatorname{tg} a \quad (4)$$

$$\text{Analogamente: } \operatorname{tg} b = \cos C \cdot \operatorname{tg} a \quad (5)$$

$$\frac{A'C'}{A'B} = \frac{A'C'}{OA'} \cdot \frac{OA'}{A'B}, \text{ ou } \operatorname{tg} B = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{sen} c} \Rightarrow$$

$$\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{sen} c \quad (6)$$

$$\text{E, também: } \operatorname{tg} c = \operatorname{tg} C \cdot \operatorname{sen} b \quad (7)$$

Multiplicando (6) e (7):

$$\operatorname{tg} b \cdot \operatorname{tg} c = \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C \cdot \operatorname{sen} c \cdot \operatorname{sen} b$$

$$\operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C = \frac{1}{\cos b \cdot \cos c}$$

De (1), tem-se:

$$\cos a = \cot g B \cdot \cot g C \quad (8)$$

Multiplicando as fórmulas (3) e (4), resulta:

$$\operatorname{tg} c \cdot \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} C = \cos B \cdot \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{sen} c$$

$$\cos B = \frac{\operatorname{tg} c \cdot \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} C}{\operatorname{tg} a \cdot \operatorname{sen} c} = \frac{\operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} c \cdot \cos a \cdot \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} c \cdot \cos c}$$

Pela fórmula (1):

$$= \frac{\cos a \cdot \operatorname{sen} C}{\cos c}$$

$$\cos B = \operatorname{sen} C \cdot \cos b \quad (9)$$

Multiplicando (5) e (8), resulta:

$$\cos C = \cos c \cdot \operatorname{sen} B \quad (10)$$

6.6.1.2 Teorema dos senos

Em todo triângulo esférico, a razão entre o seno de um lado e o seu ângulo oposto é a mesma para os três lados e os respectivos ângulos opostos. Assim:

$$\frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} A} = \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} B} = \frac{\operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} C}$$

As Figuras 22 e 23 mostram os dois casos de triângulos esféricos quaisquer a considerar, onde são traçadas as alturas partindo do vértice C que caem sobre a base ou sobre seu prolongamento.

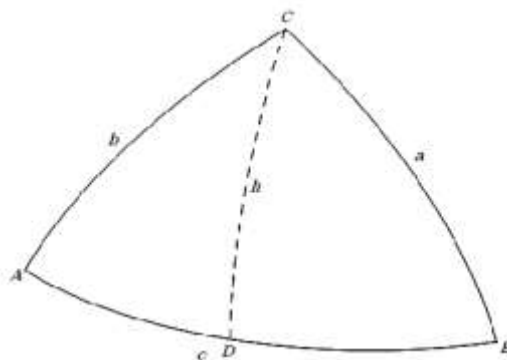


Figura 22 - Triângulo Esférico – 1º. caso para senos

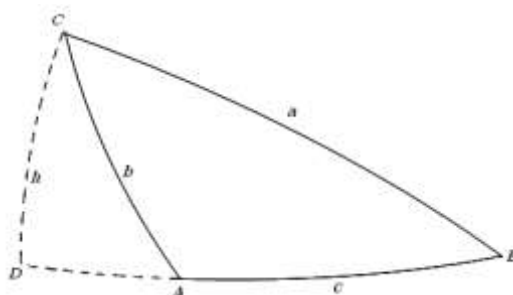


Figura 23 - Triângulo Esférico – 2º. caso para seno

O vértice D dos triângulos é reto e aplicando a fórmula (3) para triângulos retângulos esféricos tem-se:

$$\text{sen } h = \text{sen } a \cdot \text{sen } B$$

$$\text{sen } h = \text{sen } b \cdot \text{sen } A$$

$$\text{sen } h = \text{sen } b \cdot \text{sen } A$$

$$\text{sen } h = \text{sen } a \cdot \text{sen } B$$

Logo: $\text{sen } a \cdot \text{sen } B = \text{sen } b \cdot \text{sen } A$

$$\frac{\text{sen } a}{\text{sen } A} = \frac{\text{sen } b}{\text{sen } B} \quad (I)$$

Traçando a altura a partir do vértice A , de maneira análoga, encontra-se que:

$$\frac{\text{sen } a}{\text{sen } A} = \frac{\text{sen } c}{\text{sen } C}$$

E devido a (I):

$$\frac{\text{sen } a}{\text{sen } A} = \frac{\text{sen } b}{\text{sen } B} = \frac{\text{sen } c}{\text{sen } C} \quad (11)$$

6.6.1.3 Teorema dos co-senos

Em todo triângulo esférico, o co-seno de um lado qualquer é igual ao produto dos co-senos dos dois outros lados, mais o produto dos senos desses mesmos lados e do co-seno do ângulo oposto ao primeiro lado considerado.

Dado um triângulo esférico ABC , traça-se a altura a partir do vértice B e determinam-se sobre a base ou o seu prolongamento, dois segmentos conforme a Figura 24 e a Figura 25.

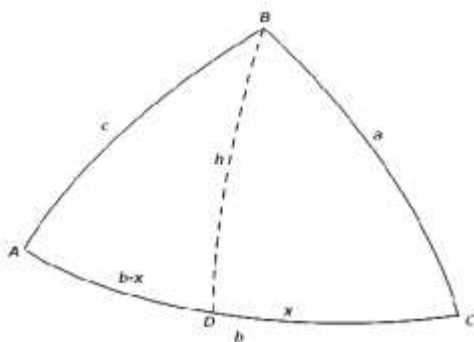


Figura 24 - Triângulo Esférico – 1º. caso para co-senos

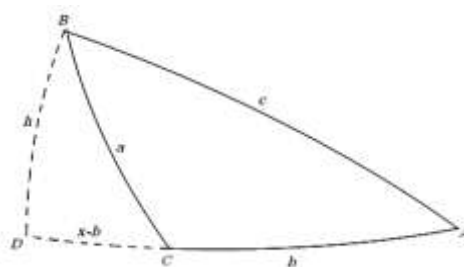


Figura 25 - Triângulo esférico – 2º. caso para co-senos

Aplicando a fórmula (1) para resolução de triângulos retângulos esféricos no triângulo esférico da Figura 24, resulta:

$$\begin{cases} \cos c = \cos h \cdot \cos(b-x) \\ \cos a = \cos h \cdot \cos x \end{cases} \Rightarrow \frac{\cos c}{\cos a} = \frac{\cos(b-x)}{\cos x} =$$

$$= \frac{\cos b \cdot \cos x + \operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} x}{\cos x} = \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \operatorname{tg} x$$

Pela fórmula (5) para resolução de triângulos retângulos tem-se que:

$$\frac{\cos c}{\cos a} = \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \operatorname{tg} a \cdot \cos C =$$

$$\cos b + \operatorname{sen} b \cdot \frac{\operatorname{sen} a}{\cos a} \cdot \cos C \quad \therefore$$

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b + \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b \cdot \cos C \quad (12)$$

Ao traçar-se a altura do triângulo esférico a partir dos vértices A e C, obtém-se, de maneira análoga:

$$\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cdot \cos c + \operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} c \cdot \cos A \\ \cos b &= \cos a \cdot \cos c + \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} c \cdot \cos B \end{aligned} \quad (13)$$

Obter-se-ia o mesmo a partir da Figura 25, com o mesmo raciocínio.

As fórmulas do teorema dos co-senos e teoremas dos senos são também conhecidas como, respectivamente, 1º. e 2º. Grupos de Bessel, por ter sido o astrônomo alemão Friedrich Wilhelm Bessel (22/07/1784 – 17/03/1846) quem as deduziu.

Existem outras fórmulas que podem ser aplicadas na resolução de problemas em triângulos esféricos. Algumas dessas fórmulas são conhecidas como:

- Fórmulas dos cinco elementos;
- Fórmulas das co-tangentes;
- Fórmulas da Borda;
- Fórmulas dos Marinheiros;
- Fórmulas de Briggs;
- Analogias de Gauss-Delambre;
- Analogias de Neper.

Neste trabalho, essas fórmulas não serão abordadas, pois não haverá necessidade de aplicá-las na situação que se apresentará em seguida.

7 Aplicações e Discussões

Neste capítulo serão analisadas algumas situações que envolvem distâncias sobre a superfície terrestre, havendo assim necessidade de utilização dos conceitos de geometria elíptica e trigonometria esférica para a resolução dos problemas.

7.1. Situação

Qual o tempo de viagem de uma embarcação que parte de Carnarvon (Austrália), $\varphi=24^{\circ}53'S$ e $\lambda=113^{\circ}38'L$, até Wadu (Ilhas Maldivas), $\varphi=0^{\circ}13'S$ e $\lambda=73^{\circ}16'$, navegando a uma velocidade de 20 nós? Qual o ângulo em relação à direção norte-sul o navio deve partir para seguir a derrota ortodrômica?

A Figura 26 mostra a rota real (em branco) que a embarcação deve seguir. A linha em amarelo, embora pareça a menor distância, é um arco de círculo menor, portanto o caminho mais longo.



Figura 26 - Rota Carnarvon – Wadu

Fonte: (GOOGLE EARTH)

Em um problema que envolve distâncias e ângulos na superfície esférica é vantajoso formar um triângulo esférico com os pontos dados, pois é a maneira mais simples de resolver o problema e suas fórmulas já são conhecidas. Para facilitar a visualização, foi feito um esboço de um modelo (Figura 27).

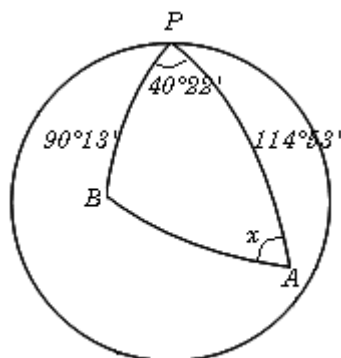


Figura 27 - Modelo para a Situação 2

A medida do ângulo P é a diferença das longitudes dos pontos A e B :

$$\hat{P} = 113^{\circ}38' - 73^{\circ}16' = 40^{\circ}22'$$

O arco (lado) PB é determinado por 90° , que é todo arco do hemisfério norte, mais a latitude que excedeu no hemisfério sul:

$$\text{Arco } PB = 90^{\circ} + 0^{\circ}13' = 90^{\circ}13'$$

De modo análogo determina o arco (lado) PA :

$$\text{Arco } PA = 90^\circ + 24^\circ 53' = 114^\circ 53'$$

Do triângulo esférico formado se conhece dois lados e o arco compreendido, logo, aplica-se o teorema dos co-senos, fórmula (15):

$$\cos(\text{arco } AB) = \cos(\text{arco } PB) \cdot \cos(\text{arco } PA) + \\ \text{sen}(\text{arco } PB) \cdot \text{sen}(\text{arco } PA) \cdot \cos \hat{P}$$

$$\cos(\text{arco } AB) = \cos(90^\circ 13') \cdot \cos(114^\circ 53') \\ + \text{sen}(90^\circ 13') \cdot \text{sen}(114^\circ 53') \cdot \cos(40^\circ 22')$$

$$\cos(\text{arco } AB) = 0,00159116 + 0,691179001 \\ = 0,692770601$$

$$\text{Arco } AB = \text{arc } \cos(0,692770601)$$

$$\text{Arco } AB = 46^\circ 09' = 2769'$$

Então, a distância entre as duas cidades é de 2769 milhas marítimas. Navegando a uma velocidade de 20 nós, o tempo que a viagem levará será de:

$$t = \frac{d}{v} = \frac{2769}{20} = 138,45 \text{ horas} = 5 \text{ dias e } 18 \text{ horas}$$

O ângulo que deve partir em relação à direção norte-sul é valor do ângulo x da Figura 27.

Para determiná-lo utiliza-se do teorema dos senos:

$$\frac{\text{sen } \hat{A}}{\text{sen}(\text{arco } PB)} = \frac{\text{sen } \hat{P}}{\text{sen}(\text{arco } AB)} \Rightarrow \\ \text{sen } \hat{A} = \frac{\text{sen}(40^\circ 22') \cdot \text{sen}(90^\circ 13')}{\text{sen}(46^\circ 09')} = 0,89810272$$

Então:

$$\hat{A} = x = \text{arc } \text{sen}(0,89810272) \Rightarrow x = 63^\circ 54'$$

8 Considerações finais

Este trabalho procurou apresentar de forma concisa e didática dois tipos de Geometrias Não Euclidianas. Atualmente, quase não se ouve falar na inexistência de retas paralelas, característica principal da Geometria Elíptica. Isso mostra o quanto se está atrasado na compreensão do universo, pois o planeta Terra é um modelo não euclidiano.

Foi mostrada uma aplicação de conceitos de Geometria Não Euclidiana em rotas de navegação marítima e também o quanto é importante o conhecimento em trigonometria esférica para a resolução de problemas envolvendo rotas de navegação marítima, pois se forem aplicados conceitos de trigonometria plana em tais situações os resultados apresentariam erros consideráveis, pois aproximações consideráveis teriam de ser feitas.

Conclui-se que deveria haver uma maior abordagem das Geometrias Não Euclidianas nos cursos de licenciatura e com isso ser possível apresentar em uma sala de aula os conceitos básicos desta geometria, já que esta é de extrema importância na resolução de vários problemas reais.

REFERÊNCIAS

BOYER, C. B. História da Matemática. 2.ed. São Paulo: Edgard Blücher.1996.

COUTINHO, L. Convite às Geometrias não Euclidianas. 2.ed. Rio de Janeiro: Interciência, 2001.

DOLCE, O.; POMPEU, J.N. Fundamentos de Matemática Elementar. 5.ed. São Paulo: Atual, 1993. 10v.

EVES, H. Introdução à História da Matemática. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004.

GOOGLE EARTH. 2008. Disponível em: <earth.google.com/intl/pt/>. Acesso em: 02 set. 2008.

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE. A Forma da Terra. 2008. Disponível em: <http://www.mundovestibular.com.br/content_images>. Acesso em: 25 ago. 2008.

WIKIPEDIA. Geometrias Não Euclidianas. 2008. Disponível em:
<http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:End_of_universe.jpg>. Acesso em: 23 mar. 2008.