

ENSINO DA GEOMETRIA ANALITICA COM O USO DO SOFTWARE GEOGEBRA

Alex Aparecido Vaz Valerio¹, Luciane de Fátima Rodrigues de Souza^{2*}

¹ Departamento de Exatas, Faculdades Integradas Regionais de Avaré, E-mail :alex_vaz2008@hotmail.com

Fundação Regional Educacional de Avaré, *E-mail: alex_vaz2008@hotmail.com

Resumo – Este trabalho apresenta algumas atividades de geometria analítica que podem ser desenvolvidas, analisadas e argumentadas com o uso de um software de geometria dinâmica, o Geogebra. Para isso foram realizados estudos em monografias, teses de mestrado, e doutorado e revistas sobre o assunto. O foco é observar se o uso do *Geogebra* é uma metodologia viável para o ensino da geometria analítica e sugerir o uso desta tecnologia no ensino abstrato desta disciplina nas series do ensino médio estadual. É analisado também, com base nas pesquisas bibliográficas, o avanço da tecnologia e as mudanças que elas causaram na maneira de ensinar.

Palavras-chave: Aprendizagem, Educação Matemática, tecnologia,

Abstract –This paper presents some analytical geometry activities that can be developed, analyzed and argued with the use of a dynamic geometry software. For that studies in monographs, master's theses, and doctoral and magazines on the subject. The focus is to observe the use of Geogebra is a viable methodology for the teaching of analytic geometry and suggest the use of this technology in the teaching of the subject in abstract series of high school statewide. It also analyzes based on literature searches the advancement of technology and the changes they caused in the way of teaching.

Key-Words – Learning, Mathematics Education, technology,

I. INTRODUÇÃO

A geometria, que nasceu com Euclides através de conceitos propriedades e noções primitivas foi e é importante para o desenvolvimento intelectual e social do homem pois é facilitadora da resoluções de problemas e do raciocínio visual. É presente nas mais simples formas da natureza, como por exemplo, na arte, escrita, arquitetura e no próprio corpo humano

pode ser visualizada no bidimensional e tridimensional.

A geometria é um dos três blocos propostos para serem desenvolvidos pelo currículo de matemática do estado de São Paulo, bases comuns e nacionais. Requer que os discentes desenvolvam habilidades como percepção, concepção, construção e representação de figuras geométricas e espaciais, e que sirva de apoio para resoluções, aplicações de problemas em seu cotidiano. Este conteúdo é desenvolvido de forma espiralada em todas series/ anos do ensino fundamental II e médio recebendo tratamento diferenciado a cada tema e habilidade a serem desenvolvidas em cada serie/ano [4]. Este bloco é abrangente, mas para este estudo trataremos da geometria analítica, que segundo [1], tem como função tratar algebricamente as propriedades e os elementos geométricos.

A geometria analítica requer que os discentes desenvolvam habilidades e competências com simples representações de pontos, figuras e relações de equação no plano cartesiano, até a resolução de problemas com equações e inequações, identificação de equação de reta, circunferência e formas cônicas. Esta relação da geometria e álgebra foi desenvolvida por René Descartes por volta do século XVII e hoje faz parte do currículo do estado de São Paulo e dos PCNEM.

A tecnologia cada vez mais freqüente no ambiente escolar e mundial nos leva a pensar em novas metodologias de ensino, já que o avanço tecnológico é visível em nosso cotidiano. Não podemos deixar de usar potenciais ferramentas de ensino, já que há uma grande disponibilidade de recursos como Internet, editores de textos, planilhas e software educacionais. Ou seja, essas ferramentas fazem lançarmos para os alunos uma nova didática, tornando o ensino mais

interessante e colaborando para a mudança de relação entre aluno e professor. De acordo com [3], essas metodologias nos levam a interpretar em suas entrelinhas que temos desenvolver habilidades nos discentes, levando os mesmos a renovações de saberes.

É preciso ainda uma rápida reflexão sobre a relação entre Matemática e tecnologia. Embora seja comum, quando nos referimos às tecnologias ligadas à Matemática, tomarmos por base a informática e o uso de calculadoras. Esses instrumentos, não obstante suas importâncias, de maneira alguma constituem o centro da questão. O impacto da tecnologia na vida de cada indivíduo vai exigir competências que vão além do simples lidar com as máquinas. A velocidade do surgimento e renovação de saberes e de formas de fazer em todas as atividades humanas tornarão rapidamente ultrapassadas a maior parte das competências adquiridas por uma pessoa ao início de sua vida profissional [3].

Segundo [6] é visível a inserção das TIC no domínio escolares, já que os discentes estão em contato contínuo com as mesmas. Ou seja, estas são facilitadoras no ensino aprendizagem já que saem dos padrões formais de ensino que são lousa e giz, que pouco atraem os alunos. Contudo, o uso de softwares não garante melhoria no ensino; é necessário articular este processo com novas metodologias para fazer com que os alunos deixem de decorar fórmulas, e passem a construir o conhecimento.

Neste contexto este trabalho vem propor uma nova visão para o ensino da geometria analítica, já que é um assunto bastante importante para os vestibulares e mesmo para concursos que os alunos venham a prestar. Como recurso de ensino será utilizado o Geogebra, que é um software de geometria dinâmica usado para abstrair alguns conceitos geométricos e melhor construção das habilidades e competências.

II. O CURRÍCULO DE GEOMETRIA NAS SÉRIES DO FUNDAMENTAL E MÉDIO

A importância da geometria não pode ser descartada, já que a mesma é parte

fundamental da estrutura curricular de ensino de matemática das séries iniciais até as finais. Nos anos iniciais estão inclusas a geometria bi e tridimensional que trabalham as habilidades de analisar, classificar, descrever, combinar, transformar figuras geométricas, desenvolver a percepção espacial, relacionar com idéias numéricas e de medida.

No currículo do fundamental II e médio, geometria, é um dos três blocos propostos para serem desenvolvidos pelo currículo de matemática do estado de São Paulo, bases comuns e nacionais, pois requerem que os discentes desenvolvam habilidades como percepção, concepção, construção e representação de figuras geométricas e espaciais e que sirva de apoio para resoluções, aplicações em problemas em seu cotidiano. Este conteúdo é desenvolvido de forma espiralada em todas as séries/ anos do ensino fundamental II e médio recebendo tratamento diferenciado a cada tema e habilidade a serem desenvolvidas em cada série/ano. Os três blocos: Números, Geometria e Relações tratam de uma área da matemática, na qual é impossível desenvolver estes blocos individualmente já que eles são ligados.

A geometria é bem extensa e se divide em vários ramos. Um destes ramos é a geometria analítica que também faz parte do conteúdo a ser trabalhado no ensino médio e que necessita de pré-requisitos geométricos e algébricos adquiridos em anos anteriores para desenvolver habilidades requeridas pelo currículo;

- Saber usar de modo sistemático sistemas de coordenadas cartesianas para representar pontos, figuras, relações, equações;
- Saber reconhecer a equação da reta, os significados de seus coeficientes e as condições que garantem o paralelismo e perpendicularidade entre retas;
- Compreender a representação de regiões do plano por meio de inequações lineares;
- Saber resolver problemas práticos associados a equações e inequações lineares;
- Saber identificar as equações da circunferência e das cônicas na forma reduzida e conhecer as propriedades características das cônicas;[4].

Para que estas habilidades sejam assimiladas pelos alunos, deve-se seguir um

roteiro de conteúdos que estão previstos para serem trabalhados no primeiro bimestre e terceiro ano do ensino médio das escolas públicas, de acordo com o [4];

- Pontos: distância, ponto médio e alinhamento de três pontos;
- Reta: equação e estudo dos coeficientes, problemas lineares;
- Ponto e reta: distância;
- Circunferência: equação;
- Reta e circunferência: posições relativas;
- Cônicas: noções, equações, aplicações [4]

Esta grade curricular é semelhante a um mapa no qual não cabe tudo sobre o tema, mas o essencial para serem trabalhadas as competências. Cada professor deve se planejar de acordo com esse mapa para lançar-se de uma estratégia de qual será a profundidade, os recursos didáticos pedagógicos e objetivos a serem alcançados.

Assim, podemos concluir que o ensino da geometria analítica é mais do que um simples componente curricular; deve ser ensinada levando o aluno a assimilar e relacionar com as diversas situações práticas através de mecanismo que a torne menos abstrata.

III. METODOLOGIA

Tendo como base inicial deste trabalho o uso do software como um instrumento de ensino aprendizagem mais atraente para os alunos do ensino médio, para a realização deste trabalho será explorada a literatura científica sobre o uso das novas tecnologias no ensino, visando a viabilidade de posteriormente ser sugerido como um apoio para o ensino da Geometria Analítica.

Também, por meio de análises de vários softwares, inclusive do Geogebra, será mostrado que este é o mais adequado para ser trabalhado o principal elemento curricular da geometria analítica relacionando suas definições e construções gráficas objetivando melhorar o raciocínio para conceitos algébricos e geométricos que são muitos abstratos.

Muitos objetivos são esperados com a realização desta pesquisa, dentre eles mostrar uma relação entre o geogebra e o ensino da geometria analítica, trazendo para os alunos e

professor, uma nova ferramenta de ensino e aprendizagem através do questionamento, análise de construções e conceitos.

IV- O USO DE SOFTWARES NO ENSINO DA MATEMÁTICA

O uso da tecnologia é cada vez mais presente na sociedade por ser de fácil manipulação e revolucionário, tornando situações antes burocráticas em situações simples.

Na educação não seria diferente; o uso de mídias, multimídias, jogos, Internet e software no ensino é cada vez mais comum, já que o mesmo torna uma situação abstrata em situações mais dinâmicas.

Grandes grupos de professores estão buscando novos métodos de ensino e entre eles o uso de TICs. Os softwares são os centros das pesquisas relacionados a conteúdos matemáticos como funções quadráticas, trigonométricas e na geometria plana, espacial e analítica, pois possibilitam uma construção do conhecimento de forma mais concreta.

Segundo [3], a evolução tecnológica trouxe uma nova visão social com relação a maneira de aprender, socializar e produzir. Esse mundo globalizado requer que o indivíduo renove diariamente seu aprendizado. Essa transformação contribui para que o aluno deixe de construir seu conhecimento através da memorização.

De acordo com [2] o ensino onde o aluno só adquiria conhecimento nas salas de aula e o professor era detentor do conhecimento, passa por uma mudança. Neste sentido também o docente será orientador do aluno, fazendo com que busque sua aprendizagem em “coisas” que já ultrapassaram os muros das escolas.

Como lembra [1] não podemos nos omitir com a inserção destas tecnologias na educação, devido à sociedade cobrar um saber tecnológico, seja para trabalho ou para obtenção do conhecimento, que é cada vez mais acessível a qualquer momento.

V- GEOGEBRA

De acordo com o manual de ajuda, o Geogebra é um software desenvolvido por

Markus Hohenwarter com o objetivo de trabalhar com a matemática através construção e análise das situações construídas. Este programa tem uma interface dinâmica onde se relaciona álgebra, geometria e cálculo. As múltiplas vistas

é um diferencial deste material, que possui uma folha de calculo, zona algébrica, zona gráfica, barra de ferramentas, entradas de comandos, barra de menus e barras de ferramentas como mostra a Figura 1.



Figura 1- Tela de entrada do Geogebra.

Na Zona Gráfica podem ser construídos gráficos e figuras geométricas com a ajuda dos elementos da barra de ferramentas. Simultâneo às construções na zona gráfica, há uma representação dos elementos na zona algébrica e estes são atualizados automaticamente quando ocorre uma interferência na zona gráfica. A Caixa de comando é uma parte fundamental também neste software e podem ser digitadas sentenças como funções, pontos, equações de reta, do mais variados tipos, logo após a digitação a uma representação gráfica da sentença.

O Geogebra vem sendo o centro de varias pesquisas relacionas as tecnologias do ensino de geometria plana, espacial e analítica e outras áreas da matemática.

Geometria analitica e o software e o Geogebra

É interessante abordar este tema usando o recurso da historia da matemática, levando os alunos a se interessarem mais por questões relacionadas ao surgimento, evolução, aplicações da geometria analítica e qual a sua relação com ponto, reta, curvas, e descrições algébricas.

Após uma abordagem que leva o aluno a questionar os fatos que envolvem a geometria analítica, é necessária a introdução de definições

matemáticas como sistema cartesiano ortogonal, coordenadas, ponto, par ordenado e entre outras definições que serão úteis para inicio dos estudos da geometria analítica:

Definição: Sejam x e y dois eixos perpendiculares entre si dispostos em um plano. Esses eixos se cruzem em um ponto O (origem). Esse sistema é conhecido como **sistema cartesiano ortogonal** e o plano determinado pelos eixos como **plano cartesiano**. O plano é dividido pelos eixos x e y em quatro regiões denominadas quadrantes, que são numerados de um a quatro. Denomina-se **primeira bissetriz** a reta que divide o 1° e o 3° quadrantes, e **segunda bissetriz** a que divide 2° e o 4° quadrantes. em um plano cartesiano, localizam um ponto P utilizando um **para ordenado** (a, b) sendo a e b pertencente aos reais.[7].

As definições introdutórias da geometria analítica são construídas nas series anteriores do ensino fundamental e médio, mas no terceiro ano do ensino médio ela ganha uma fundamentação mais aprimorada, para resgatar estes conceitos e habilidades já desenvolvidas. Após este trabalho conceitual ser desenvolvido, seria interessante ser trabalhado com o geogebra como na Figura2 abaixo .

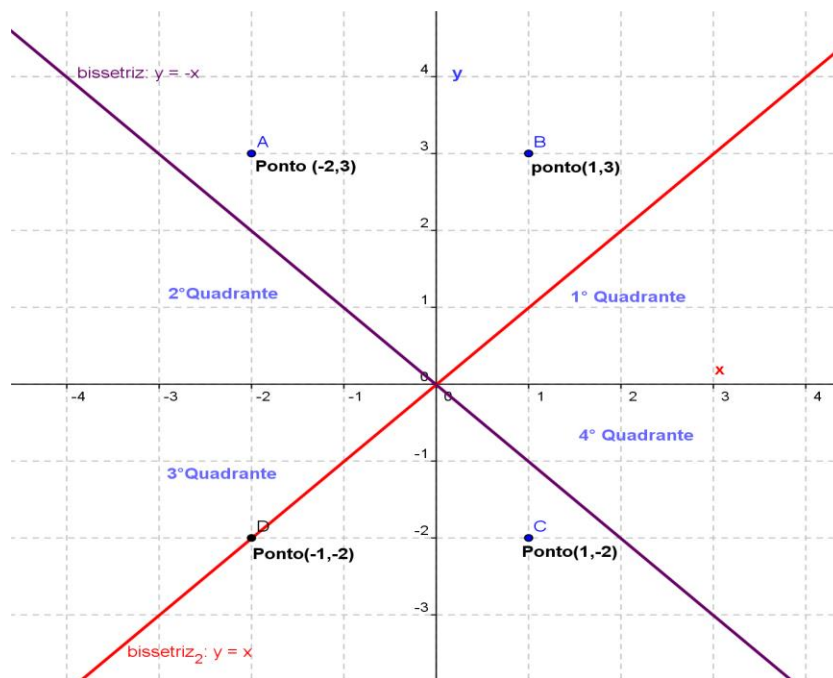


Figura 2. Plano cartesiano (construída no Geogebra)

As definições trabalhadas na Figura 2 são de plano cartesiano, sistema ortogonal, eixo das abscissas e eixo das ordenadas, ponto e suas características, bissetrizes dos quadrantes ímpares e pares. Para se trabalhar com este software é necessário que o aluno tenha o conhecimento prévio destas definições e que o programa auxilie no desenvolvimento do raciocínio e na sua construção conceitual.

Outras definições importantes são as de ponto médio e distância entre dois pontos, condições de alinhamento de três pontos que também podem ser trabalhadas em sala de aula e posteriormente construídas usando o programa, mas um dos tópicos principais e fundamentais desta parte são as equações de retas que são desenvolvidas durante todo os anos do ensino fundamental e médio em forma de uma função afim representadas em problemas de produção ou de crescimento e decrescimento linear.

Definição A toda reta do plano cartesiano é possível associar uma equação da forma $ax + by + c = 0$, com a, b, c pertencente aos reais e $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, sendo x e y coordenadas de um ponto qualquer da reta .[7].

Esta definição nos leva à equação geral da reta, ou seja um tratamento analítico. Existem varias formas de se encontrar esta equação.

Uma delas é usar o cálculo de determinante, que para desenvolver é necessário conhecer pontos A e B pertencentes a uma reta e um ponto P qualquer desta mesma reta como a demonstração abaixo:

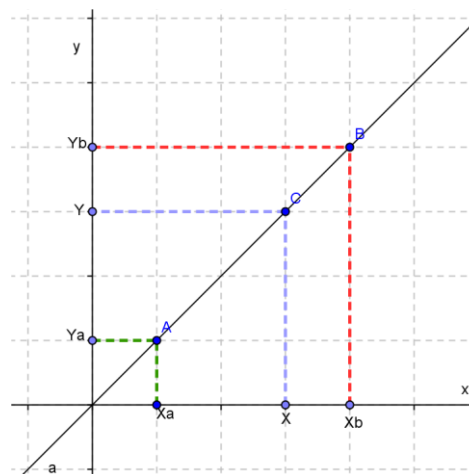


Figura 3. Equação de reta traçada por pontos A , B e P qualquer do plano (construída usando o Geogebra)

A Equação da reta representada na Figura 3 pode ser obtida resolvendo o determinante:

$$\begin{vmatrix} X & Y & 1 \\ X_a & Y_a & 1 \\ X_b & Y_b & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow x \cdot y_a + x_a \cdot y_b + x_b \cdot y - x_a \cdot y - x_b \cdot y_a = 0$$

$$\Rightarrow x \cdot (y_a - y_b) + y \cdot (x_b - x_a) + x_a \cdot y_b - x_b \cdot y_a = 0$$

fazendo

$$\Rightarrow (y_a - y_b) = a$$

$$\Rightarrow (x_b - x_a) = b$$

$$\Rightarrow x_a \cdot y_b - x_b \cdot y_a = c$$

Por tanto:

$$ax + by + c = 0$$

Conclui-se que a equação da reta é do tipo $ax + by + c = 0$ como descrita anteriormente.

O conteúdo de reta é muito dinâmico quando desenvolvido com o software; questões como inclinação e coeficiente angular de uma reta e declividade são interessantes de serem trabalhados de maneira construtiva. Através de análise o aluno chega na equação reduzida da reta do tipo $y = mx + b$, onde m é o coeficiente angular e n coeficiente linear. Estes coeficientes nos levam facilmente a visualização de posições relativas entre duas retas, conceituado por [7].

Definição Dada duas retas r e s distintas e não verticais, elas são paralelas se, e somente se, seus coeficientes angulares são iguais, isto é $m_s = m_r$. [7].

As retas coincidentes são de fácil análise através da imagem, embora quando é para analisar as equações, os alunos encontram muitas dificuldades e muitos decoram a regra, já que não entendem.

No Geogebra é fácil trabalhar com a construção de retas, ajudando os alunos a posteriormente a construção poderem debater com os demais até chegarem a uma conclusão desta definição. Certamente os alunos logo observaram que os ângulos formados pelas retas

e o eixo do x são congruentes, ou seja possuem mesmas medidas, como ilustra construção da Figura 4 abaixo.

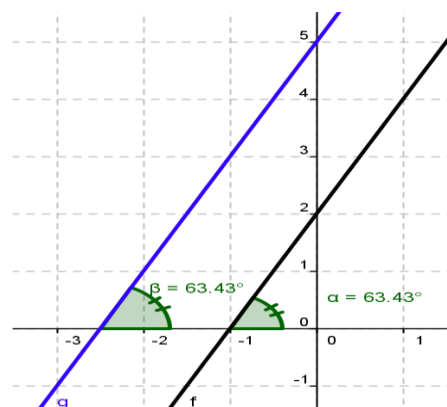


Figura 4- Retas paralelas (construída no Geogebra)

A definição de retas concorrentes é também facilmente trabalhada utilizando o mesmo processo anteriormente discutido. Se o aluno não entende o porquê, posteriormente esquecerá; quando construído e entendido o processo da definição através da construção gráfica, faz com ele esquematize e esta definição será guardada de uma maneira diferenciada não pelo processo do decorar:

Definição: Dadas duas retas r e s distintas e não verticais, elas são concorrentes se e somente se seus coeficientes angulares são diferentes, isto é $m_s \neq m_r$. [7].

Essa demonstração ficaria interessante, já que o aluno vai desenvolver a definição passo a passo com conhecimentos anteriores até o processo final chegando ao seguinte resultado como na figura abaixo:

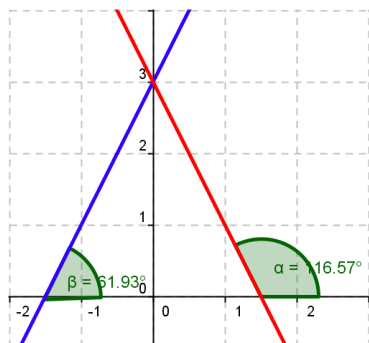


Figura5 Retas concorrentes (desenvolvidas no Geogebra)

Podem ser trabalhados muitos conceitos relacionados a retas, interpretações gráficas de um sistema de equações, representação de retas perpendiculares, trabalhadas distancia entre dois pontos e reta, inequações e suas variáveis, e outras situações, realizadas aplicações de funções e construção de gráfico de maneira fácil e pratica. Já que este trabalho é dinâmico o aluno vai adquirindo habilidade de trabalhar o programa e as construções são desenvolvidas com maior agilidade. Mas, para se trabalhar com o geogebra é viável o aluno conheça a teoria para que ele possa ir desenvolvendo as construções e analisando os seus resultados com os resultados esperados, para que o professor possa trabalhar de maneira a orientar o discente até que o mesmo chegue aos resultados esperados.

As circunferências formam outro grande tópico deste trabalho também, já que a sua interpretação analítica também é bem abstrata. Por isso, uma metodologia muito interessante é utilizar a analogias do conteúdo com atividades do dia a dia como, por exemplo, irrigação de uma lavoura com a utilização do pivô, o ponteiro de um relógio, etc, que são situações simples e acabam levando o aluno a discutir esta relação e entender facilmente a definição. Após esta abordagem podem ser citados símbolos e formulas até chegar nas principais definições matemáticas sobre circunferências, iniciando pela definição da equação da circunferência que é conceituado por [7].

Definição: Circunferência é o conjunto de todos os pontos que estão a mesma distância não nula de um ponto fixo, denominado **centro**. Cada

segmento de reta que une o centro da circunferência a um de seus pontos é chamado de raio (r) [7].

Esta definição pode ser esplanada em sala de aula e após isso, desenvolvidos alguns gráficos no Geogebra. É interessante sempre retomar conteúdos já trabalhados de forma continua usando linguagem de acordo com o contexto, para que posterior ao desenvolvimento das propriedades descritas, o aluno construa suas conclusões.

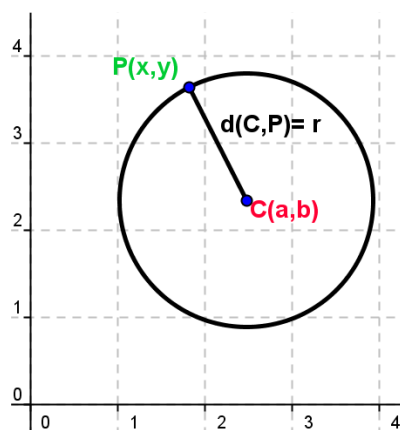


Figura 6 Circunferência construída no Geogebra.

A imagem acima é uma introdução básica e fundamental para o desenvolvimento posterior de atividades que envolvam este conceito, como exemplo a equação onde [7] conceitua ;

Definição A equação reduzida da circunferência de centro $C(a,b)$ e raio r é dada por :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

e a equação normal ou equação geral da circunferência é:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

Nesta definição são envolvidos conceitos adquiridos anteriormente, como por exemplo produtos notáveis e desenvolvimento algébrico, lugar geométrico, etc que serão essenciais durante a resolução de problemas de circunferência.

Existe um caso particular de equação de circunferência que é quando o centro é igual a origem, onde $a=b=0$, então a equação da geral será da seguinte forma $x^2 + y^2 - r^2 = 0$.

As posições relativas entre reta e circunferências formam outro eixo importante da partes de circunferência que é de difícil análise sem a visualização gráfica. Este é o caso também de posições relativas entre duas circunferências e estes conceitos são abstratos e requerem um raciocínio lógico mais apurado, onde a maioria acaba resolvendo exercícios de maneira mecânica já que habilidades como a cálculo algébrico e até mesmo conceitos de geometria plana são falhas.

Outros temas de geometria analítica necessitam de habilidades gráficas, como elipse, hipérbole, parábola, os quais não foram o foco da análise deste trabalho, também podem ser desenvolvidos de maneira articulada com o currículo de geometria analítica.

CONCLUSÃO

Este trabalho foi pautado com o objetivo de analisar a contribuição do Geogebra no ensino de conceitos da geometria analítica. Tratando de uma análise bibliográfica não podemos ter respostas definitivas apenas conjecturas, já que este trabalho não foi aplicado com um determinado grupo de aluno.

Com o desenvolvimento da pesquisa percebe-se que o uso de tecnologias está cada vez mais presente em sala de aula de maneira bem simples que são celulares e outras mídias modernas que é atrativo aos alunos já que eles podem adquirir conhecimento das mais diversas formas, sejam estas científicas ou não.

O Geogebra foi o foco desta pesquisa já que é um software livre e gratuito, e por este programa trabalhar com construções que podem ser planejadas nas mais diferentes formas possíveis. Destaca-se que o programa não vem substituir o ensino tradicional, e sim auxiliar nos desenvolvimento dos conteúdos.

Conclui-se finalmente que o Geogebra é um facilitador no ensino da geometria analítica, não requerendo conhecimento avançado de informática. Sua estrutura é bem dinâmica suprimindo algumas dificuldades dos alunos. Ou seja, Após esta análise, pode-se observar que este programa é uma ferramenta auxiliadora nos conceitos básicos de G.A desenvolvendo habilidades de maneira mais dinâmica e objetiva.

AGRADECIMENTO

Aos Professores das Faculdades Integradas e Regionais de Avaré.

REFERÊNCIAS

1. SANTOS, R.S. Tecnologias Digitais na Sala de Aula para Aprendizagem de Conceitos de Geometria Analítica: manipulações no software Grafeq. Porto Alegre:UFRGS,2008.
- 2.CHAVES, E.O.C. Tecnologia e Educação: O futuro da escola na sociedade da informação. Campinas: Mindware editora / Unicamp,1998.
- 3.PCNEM. Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio: Ciências da natureza, Matemática e suas Tecnologias.
4. CURRÍCULO. Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias/ Secretaria da Educação. São Paulo: SSE, 2010.
5. Ajuda GeoGebra Manual Oficial da Versão 3.2. Disponível em <<http://www.geogebra.org/help/docuPT.pdf>> Acesso em 15 Ago. 2012
6. NUNES,K. R. A. Arte e Recursos Digitais no Ensino da Matemática / Pátio Ensino Médio,Ano 4, N°13,Jun/Ago 2012.
- 7.RIBEIRO,J. Matemática Ciências, Linguagem e Tecnologia ,3 : ensino médio. São Paulo: Scipione,2010.